Humanoid Robotics
Summer term 2018
Date, 2018

Your Teamnumber
One Emailaddress

Modellierung des Wachstums der Wolfspopulation

Das Wachstum der Wolfspopulation $\dot{w}$ ist proportional zu dem Bestand der Wolfspopulation w mit dem Faktor 0.4055. Das Wachstum ist ebenfalls proportional zu $1 - \frac{w}{250}$, was die Beschränkung der Nahrungsbestände darstellt. Es folgt also die zu betrachtende Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 0.4055 \cdot \left(1 - \frac{w}{250}\right) \cdot w \\ \dot{w} &= 0.4055w - \frac{0.4055}{250} w^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung soll im Intervall $I = [2011; 2025]$ ausgewertet werden und die Anfangsbedingung ist $w(t = 2011) = 20$.

Verwendete numerische Verfahren

In den nachfolgenden Ausführungen sollen numerische Lösungsmöglichkeiten eines Problems der Form

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{im Intervall } I = [a; b] \tag{2}$$

behandelt werden.

Das Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite

Das Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite folgt der Gleichung

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{3}$$

Das Euler-Verfahren ist ein Ein-Schritt-Verfahren. Es wird ausgehend von einem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ der nächste Wert y_{n+1} berechnet. Dafür wird eine Schrittweite h gewählt. Es wird dann eine Gerade mit der Steigung y'_n von y_n ausgehend berechnet und so an der Stelle $x_{n+1} = x_n + h$ der approximierte Werte y_{n+1} bestimmt. Die Konvergenz des Verfahrens ist 1. Ordnung, es gilt daher, dass wenn die Schrittweite h halbiert wird, so wird sich in etwa auch der globale Fehler $max(e_n)$ halbieren.

Das Heun-Verfahren mit konstanter Schrittweite

Das Heun-Verfahren leitet sich ab aus der Trapezregel. Angenommen y_n sei bekannt, so lässt sich y_{n+1} als

$$y_{n+1} = y_n + T(f) \tag{4}$$

beschreiben. $T(f)$ sei hier der Flächeninhalt unter des Kurvenstücks der Funktion y' im Intervall $[x_n; x_{n+1}]$. Dieser Flächeninhalt wird über die Trapezregel hergeleitet. Es folgt daher

$$y_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) \cdot \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} = h \cdot \frac{f(y_n, x_n) + f(y_{n+1}, x_{n+1})}{2}, \tag{5}$$

wobei $y'_n = f(y_n, x_n)$ gilt. Der für die Berechnung von y'_{n+1} benötigte Wert y_{n+1} wird über das Euler-Verfahren bestimmt. Das Verfahren von Heun besitzt die Ordnung 2, was sich mit Hilfe der Taylorentwicklung zeigen lässt.

Numerische Berechnung und Bewertung der Ergebnisse

Zur numerischen Berechnung der Differentialgleichung wurden beide oben beschriebenen Verfahren in Matlab implementiert. Lässt man das Matlabfile 'AufrufProjekt1.m' durchlaufen, so werden numerische Lösungen der DGL bei unterschiedlichen Iterationszahlen N berechnet. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Figure 1 zu sehen. Mit einer höheren Anzahl an Iterationschritte nähern sich die numerischen Lösungen der exakten

Lösung weiter an. Da die exakte (analytische) Lösung hier zwar berechnet werden kann, in den meisten Fällen aber nicht vorliegt, wurde auf diese verzichtet und in den Abbildungen eine Numerische Lösung der DGL als Orientierung eingefügt, welche mit $N = 10^6$ Iterationschritten ermittelt wurde.
Aus Figure 1 ist ersichtlich, dass das Heun-Verfahren schon bei einer geringen Anzahl an Iterationsschritten recht genau ist, wobei das Euler-Verfahren hingegen wesentlich mehr Iterationschritte benötigt um die gleiche Genauigkeit zu erreichen. Das Euler-Verfahren ist vor allem in der Mitte des Intervalls bei geringem N sehr ungenau und weicht erheblich von der Vergleichsberechnung mit $N = 10^6$ ab. Daher ist der absolute Fehler $e = max(|w_{exa} - w_{num}|)$ dort besonders groß im Vergleich zum absoluten Fehler des Heun-Verfahren in diesem Bereich.
In Figure 2 ist die benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationschritte der beiden Verfahren gezeigt. Das Heun-Verfahren benötigt etwa die dreifache Zeit für die numerische Berechnung bei gleicher Anzahl an Iterationsschritten. Wird allerdings der erhöhte Zeitaufwand gegenüber der schnelleren Näherung an die exakte Lösung bei steigender Anzahl an Interationschritten verglichen, so kann festgehalten werden, dass das Heun-Verfahren effizienter ist. Dies liegt vor allem daran, dass der Zeitaufwand für die Berechnung der numerischen Lösung sowohl beim Heun-Verfahren als auch beim Euler-Verfahren linear mit N ansteigt. Der globale Fehler hingegen verhält sich beim Heun-Verfahren wie $max(e_n) = C_1 h^2$ und beim Euler-Verfahren wie $max(e_n) = C_2 h$. Wobei C_1 und C_2 Konstanten sind und $h = \frac{b-a}{N}$ entspricht.

Fazit

Für eine Problemstellung wie die oben dargestellte ist das Heun-Verfahren dem Euler-Verfahren vorzuziehen. Das Heun-verfahren benötigt zwar bei gleicher Anzahl der Iterationsschritte etwa die dreifache Rechenzeit, ist dafür aber um ein vielfaches genauer.